

Capítulo 3 (cont.)

O Espectro contínuo de luz

3.1 Paralaxe estelar

3.2 A escala de magnitudes

3.3 A natureza ondulatória da luz

3.4 Radiação de corpo-negro

3.5 Quantização de energia

3.6 O índice de cor

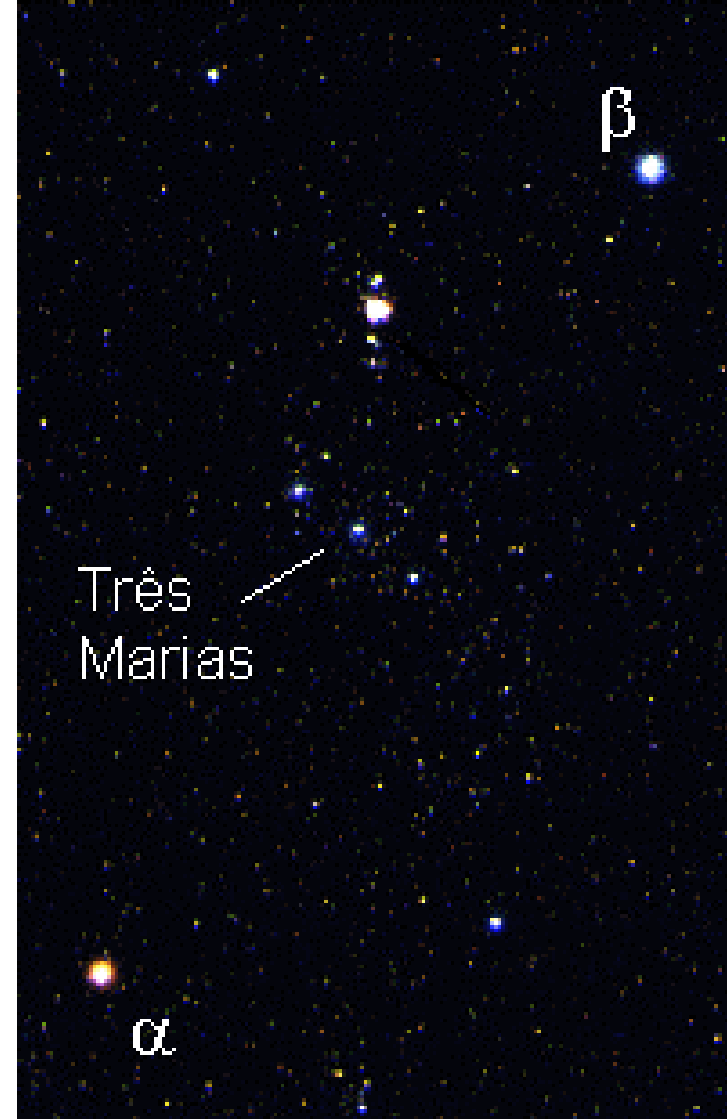
3.4 Radiação de Corpo-Negro

Orion (c/ binóculo) identifica-se a estrela **fria** avermelhada (Betelgeuse – α Ori) e a estrela **quente** azulada (Rigel – β Ori).

A cor depende da temperatura superficial da estrela

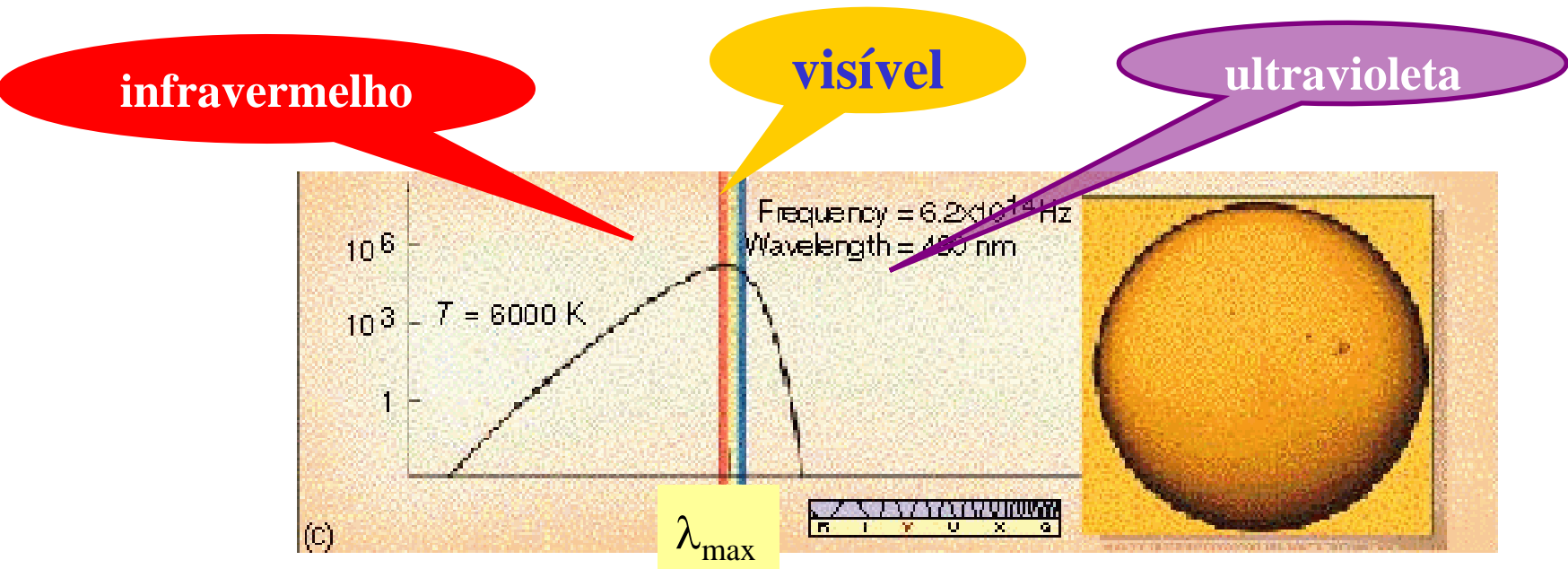
Observações mais detalhadas

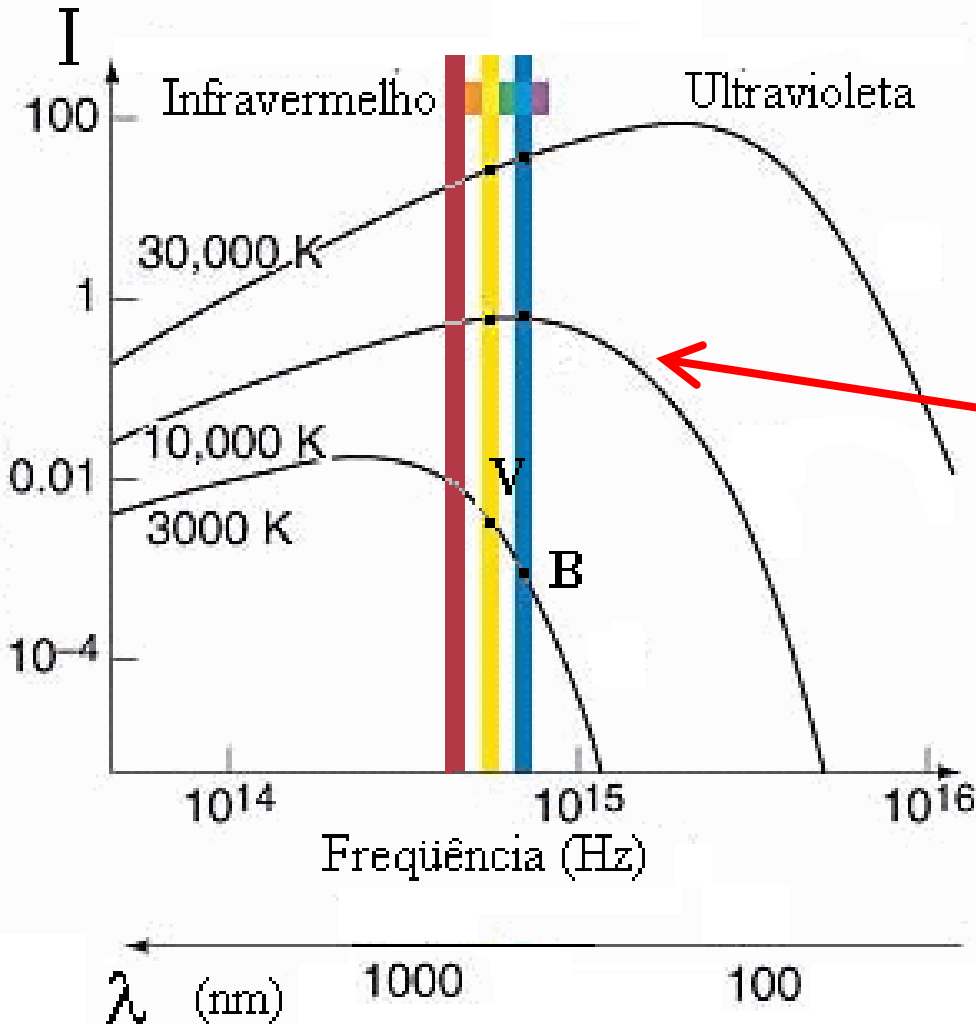
Betelgeuse ($T \sim 3600\text{K}$) e Rigel ($T \sim 13000\text{K}$)



Temperatura & Cor

Observando a radiação do Sol em muitas frequências notamos que o pico se encontra na parte visível do espectro e que ele emite muito mais no infravermelho do que no ultravioleta.





Espectro contínuo emitido pelas estrelas → **radiação de corponegro**

Intensidade de Radiação representada pela **função de Planck**, que depende da frequência de radiação ($\nu = c/\lambda$) e da temperatura da estrela.

* Os pontos na curva se referem às bandas fotométricas **B** (Blue) e **V** (Visible)

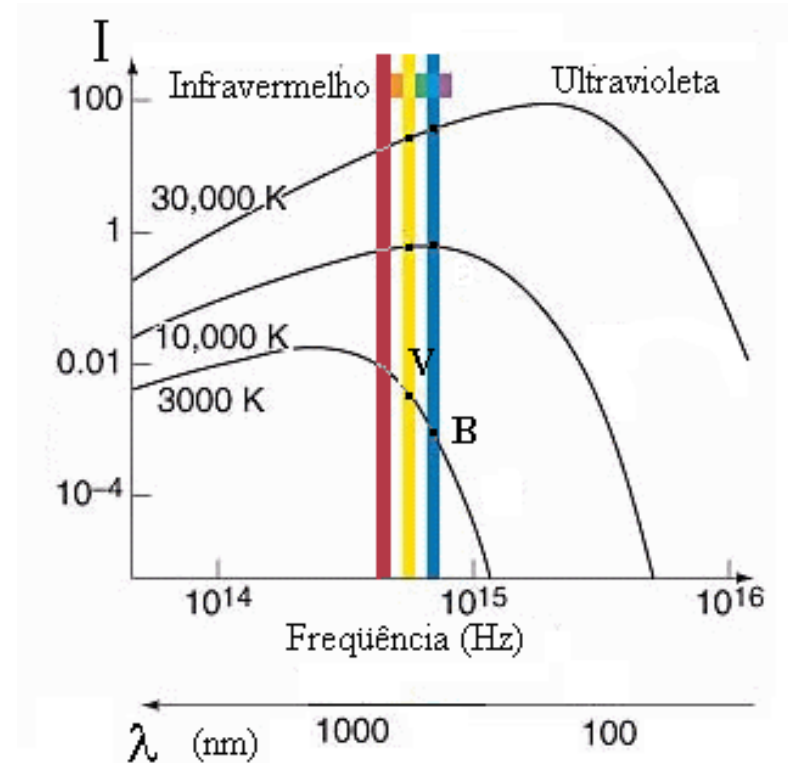
Radiação de Corpo Negro

Espectro contínuo emitido pelas estrelas

- Objeto caracterizado por uma temperatura **T**.
- Supõe-se um estado de equilíbrio termodinâmico.

A frequência ν_{max} corresponde ao *máximo de intensidade*

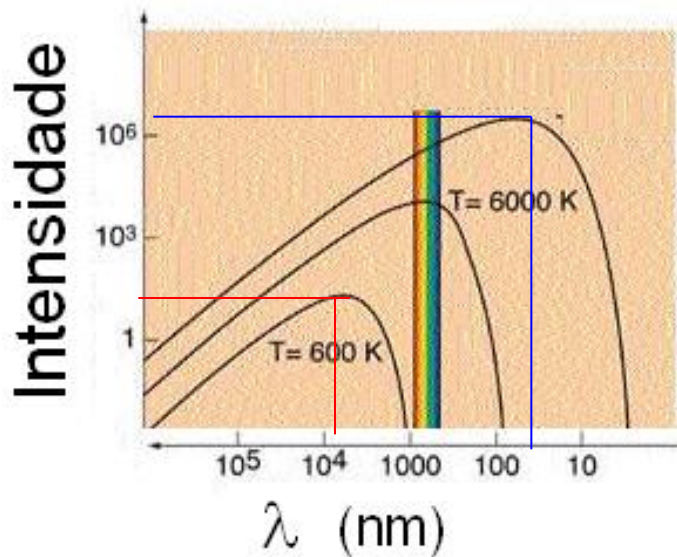
aumenta com T $\left\{ \begin{array}{l} T \uparrow; \nu_{max} \uparrow; I \uparrow; \\ T \uparrow \lambda_{max} \downarrow \text{ (azul) ou } T \downarrow \lambda_{max} \uparrow \text{ (vermelho)} \end{array} \right.$



Deslocamento do pico de máxima intensidade:

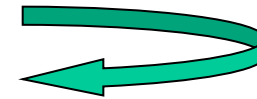
variação de λ_{\max} em função de T

- Onde ocorre o máximo de intensidade?



$(I_{\max}) \Rightarrow \lambda_{\max}$ obtido pela derivada

$$\frac{d I_{\lambda}}{d \lambda} = 0$$

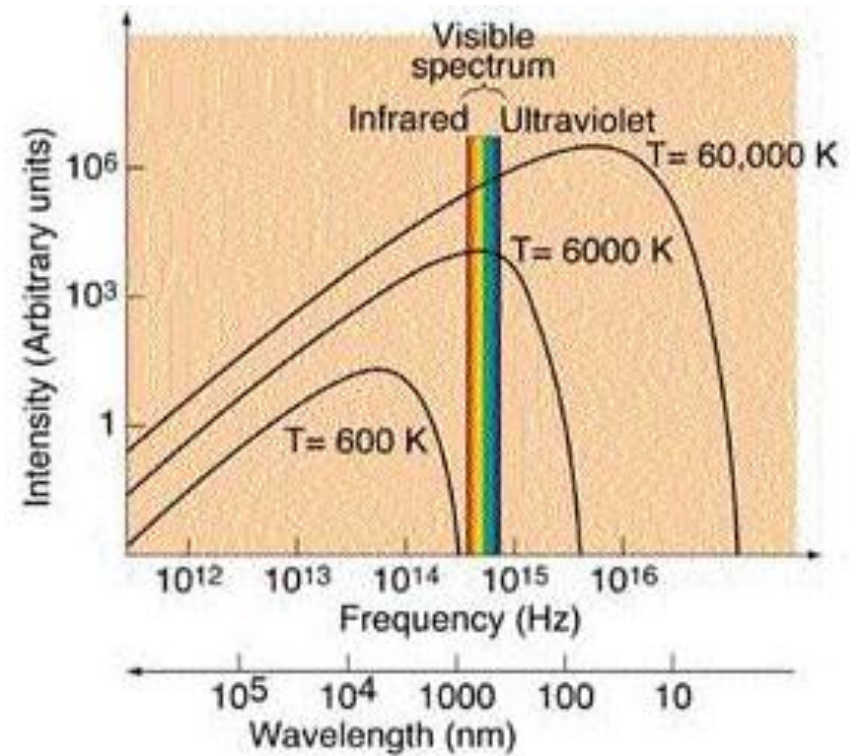


Lei de Wien

$$\lambda_{\max} (cm) = \frac{0,2897755}{T(K)}$$

Exemplos

- Sol ($T_{\text{ef}} \sim 5800 \text{ K}$)
 $\Rightarrow \lambda_{\text{max}} \sim 500 \text{ nm}$ (visível)
- Antares ($T_{\text{ef}} \sim 3000 \text{ K}$ gigante vermelha)
 $\Rightarrow \lambda_{\text{max}} \sim 1 \text{ }\mu\text{m}$ (infravermelho)
- Sirius ($T_{\text{ef}} \sim 10000 \text{ K}$ gigante azul)
 $\Rightarrow \lambda_{\text{max}} \sim 290 \text{ nm}$ (ultravioleta).



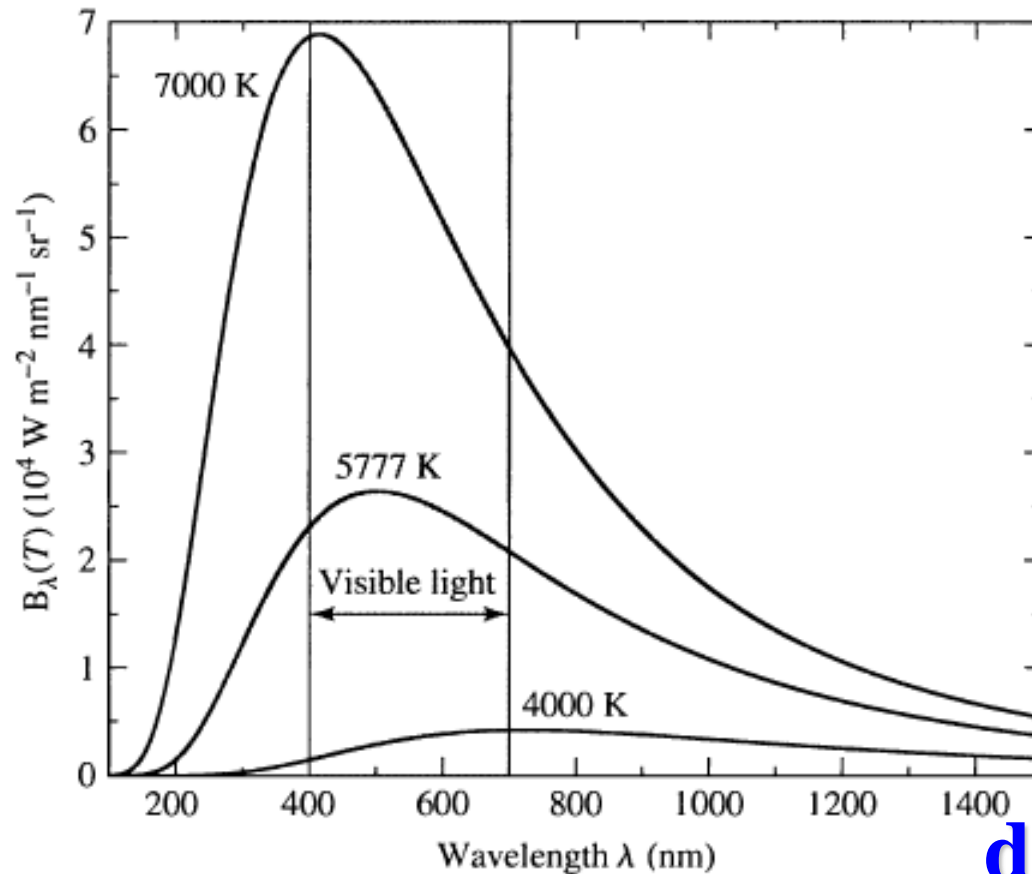


FIGURE 3.8 Blackbody spectrum [Planck function $B_\lambda(T)$].

T is known as **Wien's displacement law**:¹³

$$\lambda_{\max} T = 0.002897755 \text{ m K.}$$

(3.15)

Lei do
deslocamento
de Wien



James Stefan (1835 – 1893)

Lei de Stefan – Boltzmann

1879: Stefan mostra que a luminosidade de um corponegro de temperatura T e área A é dada por: $L = A\sigma T^4$



Ludwig Boltzmann (1844 – 1906)

1884: Boltzmann usa as leis da termodinâmica e a fórmula de Maxwell para a pressão de radiação e deduz a equação:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Para uma esfera de raio R , onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$ (cte de Stefan – Boltzmann)

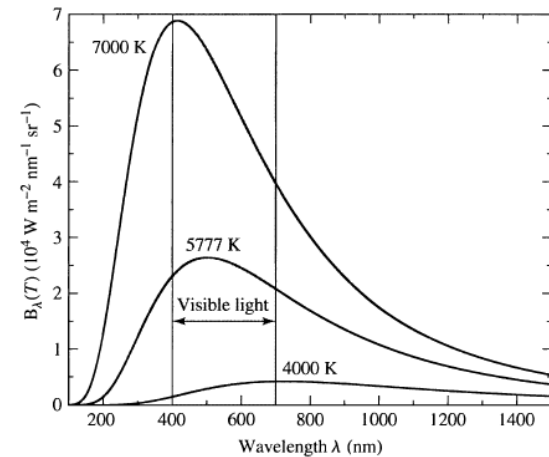
Na superfície da estrela, define-se $T = T_e$

(temperatura efetiva). O fluxo total é: $F = \sigma T_e^4$

3.5 A quantização de energia

- Rayleigh combinou equações de Maxwell com a física térmica para deduzir a expressão:

$$B_{\lambda}(T) \cong \frac{2 c k T}{\lambda^4}$$



essa aproximação para a radiação de corponegro, hoje conhecida por **lei de Rayleigh-Jeans**, só é válida caso **λ seja longo**.

- Wien também buscava a expressão correta para a curva de radiação de corponegro e desenvolveu a lei empírica, válida caso **λ seja curto**:

$$B_{\lambda}(T) \cong a \lambda^{-5} e^{-b/\lambda T}$$

onde a e b são constantes de ajuste dos dados experimentais.

$k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ cte. de Boltzmann



Max Planck
(1858-1947)

Planck descobriu que uma modificação da expressão de Wien poderia reproduzir também a lei de Rayleigh-Jeans, evitando o problema de $\lambda \rightarrow 0$

$$B_{\lambda}(T) \cong \frac{a / \lambda^5}{e^{b / \lambda T} - 1}$$

Processos de interação da radiação com matéria (átomos ou moléculas) \Rightarrow **pacotes discretos** = *quanta* (plural de *quantum*) de energia.

No caso da luz visível \Rightarrow fótons \Rightarrow o mínimo de energia dado por $E=h \nu$, onde $h = 6,63 \cdot 10^{-27}$ erg s ($= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; cte. de Planck).

A função de Planck é a expressão da curva de radiação de corponegro

$$B_{\lambda}(T) \cong \frac{2hc^2 / \lambda^5}{e^{hc / \lambda kT} - 1}$$

Aproximações da Lei de Planck

Dependendo da faixa de frequências, podemos adotar algumas aproximações para a expressão de intensidade de radiação:

1. Distribuição de Wien:

Altas frequências e
Temperaturas não muito altas

$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$$

$$B_{\nu}(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]}$$

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

Aproximações da Lei de Planck (cont.)

$$B_{\nu}(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]}$$

2. Distribuição de Rayleigh-Jeans:

Baixas frequências e Temperaturas não muito baixas

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/kT}$$

$$B_{\nu}(T) = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$

Função de Planck e o fluxo monocromático de radiação

Parâmetro que se relaciona diretamente com a medida da energia coletada:

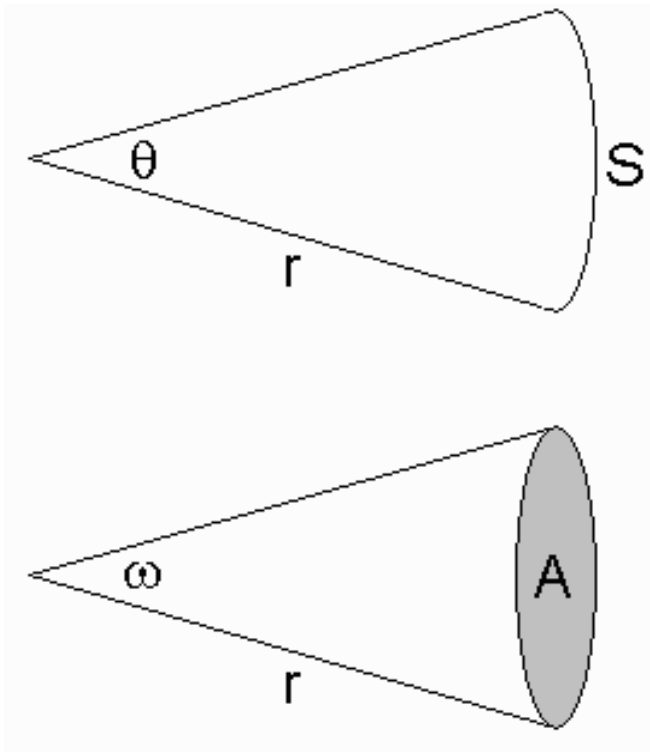
$$F_{\nu} = \frac{\text{energia}}{\Delta t \Delta A \Delta \lambda}$$

O fluxo (F) de energia que chega numa superfície é a *quantidade de energia* por *unidade de tempo* que passa através de uma *unidade de área* da superfície por unidade de *intervalo de comprimento de onda*:

unidades **erg** **s**⁻¹ **m**⁻² **nm**⁻¹

Revisão dos conceitos geométricos

- ângulo sólido de um feixe de radiação \Rightarrow definido em função da área A interceptada pelo feixe numa superfície esférica de raio r .

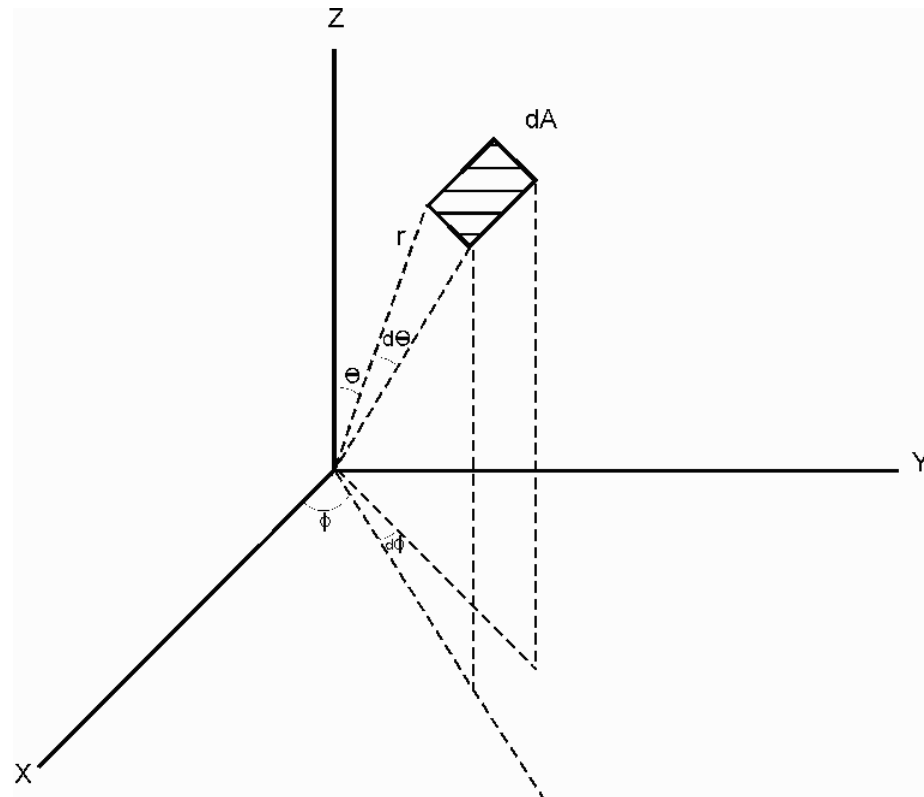


Ângulo entre duas retas: $\theta = S / r$
onde θ é medido em radianos ($\theta = 2\pi$,
toda circunferência; perímetro $= 2\pi r$),

ângulo sólido (abertura do cone):
 $\omega = A / r^2$ onde ω é medido em
esteradianos ($\omega = 4\pi$, toda a esfera;
área de superfície $= 4\pi r^2$)

Revisão dos conceitos geométricos (cont.)

- Apresentando o ângulo sólido em coordenadas esféricas, temos:



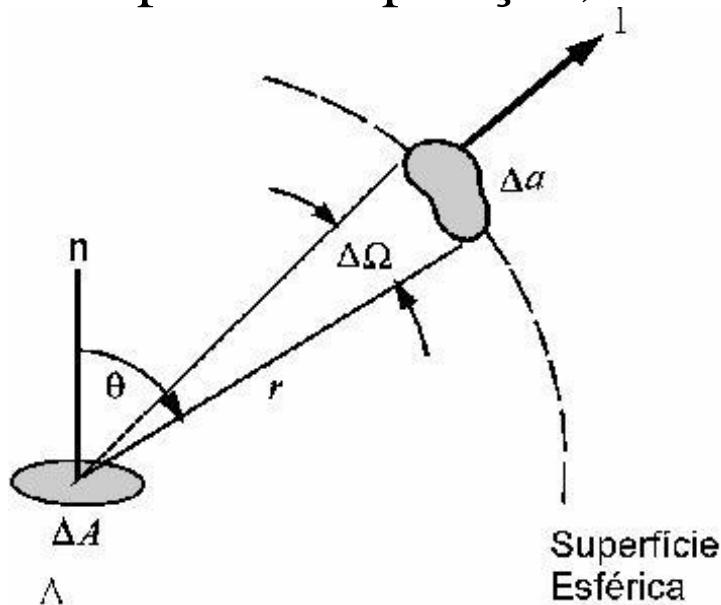
área elementar

$$dA = (r d\theta) (r \sin\theta d\phi)$$

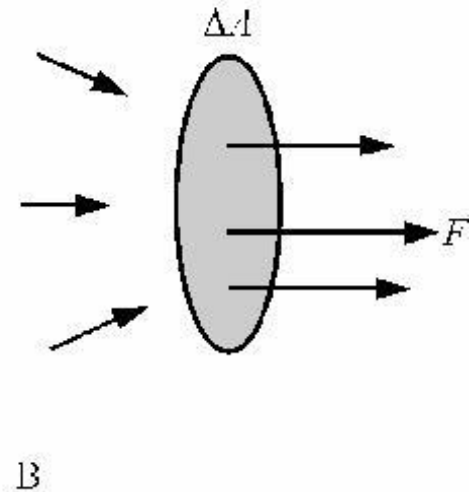
ângulo sólido elementar
subtendido pela área dA :

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

- Considere \Rightarrow elemento de área Δa , formando um ângulo θ com a normal, temos que a **intensidade específica (I_v ou I_λ)** depende da posição, da direção e do tempo.



(A) Intensidade de energia por uma unidade de área ΔA da fonte emissora, que atravessa um elemento de área Δa .



(B) Fluxo integrado resultante

A lei de Planck em sistemas astrofísicos

A quantidade de energia emitida por unidade de tempo Δt , por unidade de área da fonte dA , no intervalo de comprimento de onda $\lambda + d\lambda$, por unidade de ângulo sólido em uma dada direção:

$$F_{\lambda} B_{\lambda}(T) \cos \theta = \frac{dE}{dt dA d\lambda d\Omega} L_{\lambda}$$

nas unidades: $\text{erg s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1} \text{ sr}^{-1}$.

ou $\text{erg s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ se usarmos a expressão de Planck em função da frequência

$$B_{\nu}(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]}$$

Luminosidade (taxa de energia) e fluxo monocromático

Modelo de estrela, esfera de raio R , emitindo como corponegro à uma temperatura T :

$$L_{\lambda} d\lambda = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_A B_{\lambda} d\lambda dA \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$$

$$L_{\lambda} d\lambda = 4\pi^2 R^2 B_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi^2 R^2 hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Integrando *em* todos os comprimentos de onda: $\int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

$$F_{\lambda} d\lambda = \frac{L_{\lambda}}{4\pi r^2} d\lambda = \frac{2\pi hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) d\lambda$$

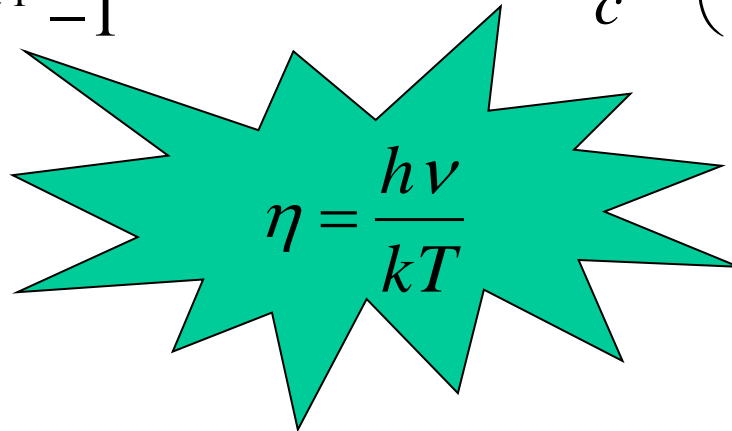

$$\pi B(T) \approx \sigma T^4$$

Equação de Stefan – Boltzmann

- A integral da função $F_\nu = \pi B_\nu$ sobre todas as frequências ν , determina o fluxo total na superfície da estrela:

$$F = \int F_\nu d\nu = \sigma T^4$$

$$F = \frac{2\pi h}{c^2} \int \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \Rightarrow F = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta$$


$$\eta = \frac{h\nu}{kT}$$

$$F = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4$$

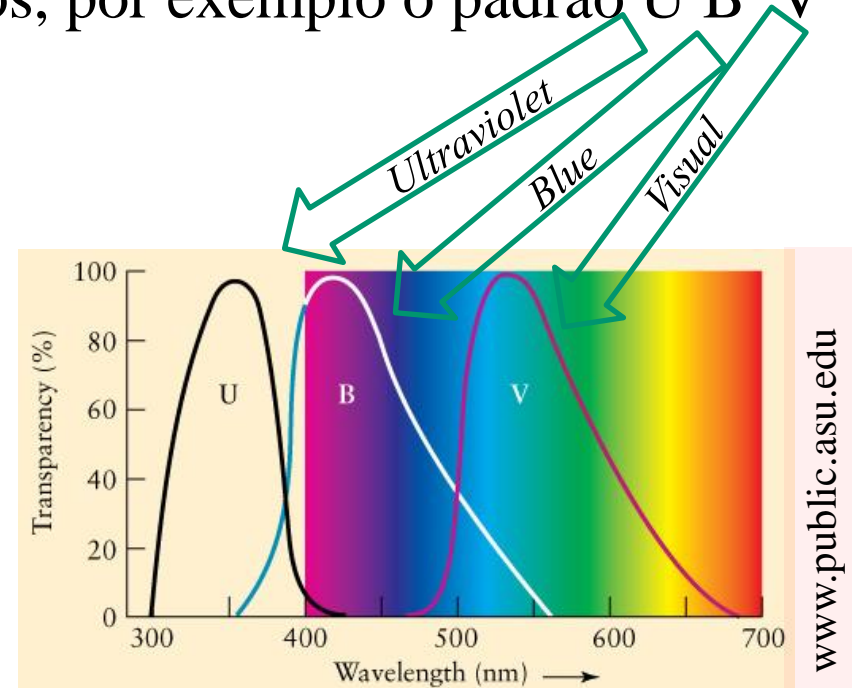
3.6 Índice de Cor

As magnitudes (aparente e absoluta) definidas anteriormente são **bolométricas** (m_{bol} e M_{bol}).

Na prática, os fotômetros medem o fluxo de radiação por faixas estreitas de comprimento de onda.

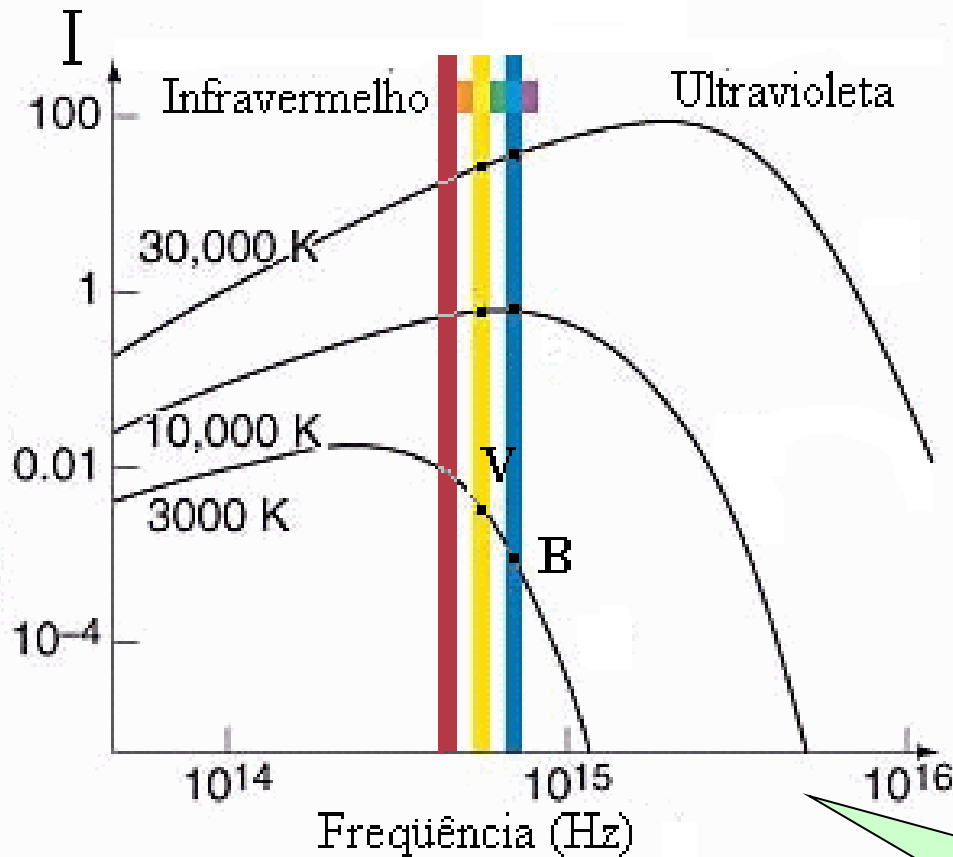
A cor de uma estrela pode ser determinada por medidas da magnitude aparente, usando um sistema de filtros, por exemplo o padrão U B V

filtro	cor	λ (nm)	Largura(nm)
U	ultravioleta	365	68
B	azul	440	98
V	visível	550	89



Índice de Cor

$$B-V = m_B - m_V = -2,5 \log (F_B / F_V)$$



$$B \ll V \Rightarrow F_B \gg F_V$$

$$[B-V] < 0$$

Estrela quente, azulada

$$B \gg V \Rightarrow F_B \ll F_V$$

$$[B-V] > 0$$

Estrela fria, avermelhada

Lembrar que fluxos mais intensos são representados por magnitudes menores.

Correção Bolométrica

O índice de cor B-V é a diferença entre as magnitudes nos filtros B e V :

$$B - V = M_B - M_V$$

e o índice U-B é a diferença das magnitudes nos filtros U e B :

$$U - B = M_U - M_B$$

A Correção Bolométrica (BC) é a diferença entre a magnitude bolométrica e a magnitude no visível:

$$BC = m_{bol} - V = M_{bol} - M_V$$

Magnitude e fluxo

Por convenção, estrelas tipo A têm índices de cor zero: $U-B = B-V = 0$.

$$V = -2,5 \log \left(\int_0^\infty F_\lambda S_V d\lambda \right) + C_V$$

As constantes de calibração de um dado sistema fotométrico (C_V) e a sensibilidade do telescópio (S_V) são escolhidos de forma a definir o zero de magnitude ($V=0$).

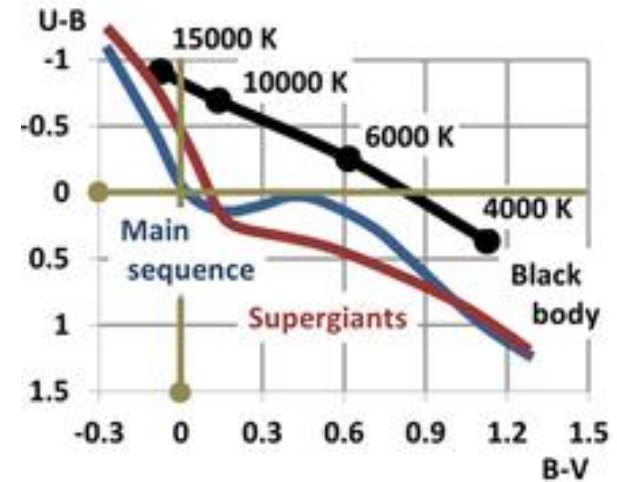
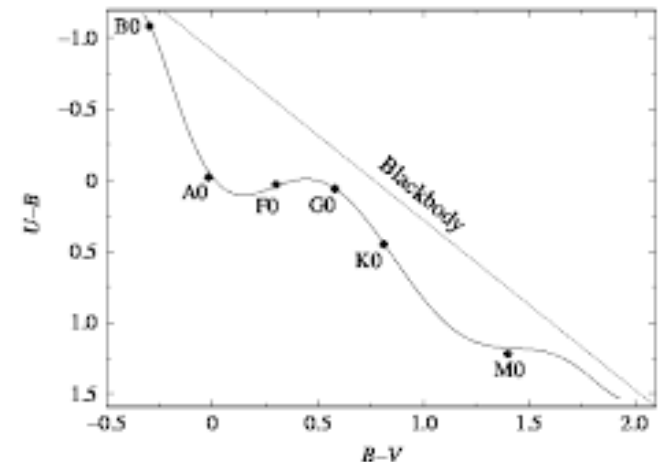


Diagrama Cor-Cor

A relação $U-B$ e $B-V$ para as estrelas da Sequência Principal mostra que as estrelas não se comportam exatamente como corponegro*.



(*) No Cap. 9 veremos que parte da luz é absorvida na atmosfera estelar

BIBLIOGRAFIA

- Carroll & Ostlie (2007, Cap. 3)
- Karttunen et al. (1997, Cap. 4)

Exercícios

1. Uma estrela variável muda de brilho por um fator 3. Em quanto sua magnitude aparente é alterada?

2. A magnitude V observada em duas estrelas é 7,5 mag para ambas, mas suas magnitudes no azul são $B_1=7,2$ e $B_2=8,7$. Qual é o índice de cor $[B-V]$ de cada estrela? Qual é a mais quente?

Exercícios

3. Se uma estrela tem magnitude aparente $-0,4$ e paralaxe $0,3''$, qual é seu modulo de distância? Qual é sua magnitude absoluta?

4. Duas estrelas A e B têm luminosidades $80 L_{\odot}$ e $5 L_{\odot}$ respectivamente. Ambas são observadas com o mesmo brilho (magnitude) aparente. Se a estrela B tem distância de 100 pc , qual é a distancia da estrela A?